数理解析研究所講究録
1197巻 2001年 60-72

On blow-up criterion to the 3-D Euler equations in a bounded domain

九州大学数理学研究院 (Kyushu Univ.) 小川卓克 (Takayoshi OGAWA)
東北大学大学院理学研究科 谷内靖[1](Yasushi TANIUCHI)

(Tohoku Univ.)

1 序

本稿では、3次元有界領域Ωにおける非圧縮性非粘性流体の運動を記述するEuler方程式のなめらかな解の爆発について議論する。Ωをなめらかな境界$\partial\Omega \in C^\infty$を持つ有界領域とする。Euler方程式とは次のようなものである。

$$
\text{(E)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0 \quad \text{in } x\in\Omega,\ t>0,, \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } x\in\Omega,\ t>0, \\ u\,|_{t=0} = a, \\ u\cdot n = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}
$$

ここで、$u=(u^1(x,t),u^2(x,t),u^3(x,t))$、$p=p(x,t)$は、それぞれ流体の速度場と圧力をあらわす未知関数である。また、$a=(a^1(x),a^2(x),a^3(x))$は与えられた初期速度場で、$n=n(x)=(n^1(x),n^2(x),n^3(x))$は、境界$\partial\Omega$に対する単位法線ベクトルである。

この方程式のなめらかな初期値に対する解の可解性は、Ebin-Marsden[12]、Bourguignon-Brezis[3]、Temam[33]、Kato-Lai [16]、Okazawa[25][26] らによって示されている。ここではKato-Lai [16] の結果を紹介する。

Theorem 1 (Kato-Lai) mを*3*以上の整数とする。任意の初期値$a\in H^m$に対し、ある$T>0$と

$$C([0,T);H^m)$$

に属する一意な解uが存在する。ここで、存在時間Tは

$$T \geq C/\|a\|_{H^3}$$

で評価できる。

上のような解で、有限時間でH^m-normが爆発するような物が存在するのか、それとも、時間大域的に解が続くのかは、未解決な問題である。すなわち、時間大域的可解性は分かっていない。

このことに関連したこととして、有名なBeale-Kato-Majda [2] のblow-up criterionがある。彼らは、$\Omega=\boldsymbol{R}^3$の場合に次のことを示した。

[1]現住所 信州大学数理・自然情報科学科

Theorem 2 (Beale-Kato-Majda, Ferrari, Shirota-Yanagisawa) *m を 3 以上の整数とし、u を $C([0,T);H^m(\Omega))$ に属する Euler 方程式の解とする。もし*

$$\limsup_{t\nearrow T}\|u(t)\|_{H^m}=\infty$$

であるならば、

$$\int_0^t\|\omega(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}d\tau\nearrow\infty\quad(t\nearrow T).$$

ここで ω は渦度、すなわち $\omega=\mathrm{rot}\ u$ である。

この結果から渦度 ω の L^∞-norm が解 u の爆発を左右していることがわかる。

Theorem 2 は Ω が滑らかな境界 $\partial\Omega\in C^\infty$ を持つ有界領域の場合にも成り立つことが Ferrari[14] と Shirota-Yanagisawa[28] によって、それぞれ独立に証明されている。また、一般次元の全空間 $\Omega=\boldsymbol{R}^N$ の場合にも Kato-Ponce[18] によって示されている。さらに、最近、$\Omega=\boldsymbol{R}^N$ の場合に Kozono-Taniuchi[20] や Kozono-Ogawa-Taniuchi[21] によって、Theorem 2 は改良され、同じ仮定のもとで

$$\int_0^t\|\omega(\tau)\|_{\mathbf{BMO}}d\tau\nearrow\infty\quad(t\nearrow T)\ \text{や}\qquad\int_0^t\|\omega(\tau)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}d\tau\nearrow\infty\quad(t\nearrow T)$$

が証明されている。また、$\Omega=\boldsymbol{R}^3$ の場合に Constantin[8] は、Theorem 2 の仮定に加えて、$\|u\|_{L^\infty}$ と渦度の方向 $\omega/|\omega|$ に対するある条件を仮定した時、

$$\int_0^t\|\omega(\tau)\|_{L^1_{unif,loc}}d\tau\nearrow\infty\quad(t\nearrow T)$$

となることを証明している。ここで $\|f\|_{L^1_{unif,loc}}=\sup_x\int_{|y-x|<1}|f(y)|dy$ である。さらに、Beale-Kato-Majda の blow-up criterion と類似した物が Boussinesq 方程式でも成り立つことが示されている。(Chae-Nam[7], Chae-Kim-Nam[6], Ishimura-Morimoto[15], Taniuchi[31].)

本稿では、Ω が有界領域の場合の Euler 方程式に対する Ferrari や Shirota-Yanagisawa の結果の改良を考える。

2 準備 (L^∞ の拡張)

結果を述べる前に L^∞ を拡張した関数空間を幾つか導入する。

2.1 bmo

<u>DEFINITION 1.(重み付きの **bmo**)</u>

$\beta(r)\geq 1$ は $(0,1]$ 上で定義された非増加関数とする。

(i) $\mathbf{bmo}_\beta(\boldsymbol{R}^3) \equiv \{f \in L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^3); \|f\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\boldsymbol{R}^3)} < \infty\}$,

$$\|f\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\boldsymbol{R}^3)} \equiv \sup_{0<r<1, x\in\boldsymbol{R}^3} \frac{1}{|B(x,r)|\beta(r)} \int_{B(x,r)} |f(y) - \bar{f}_{B(x,r)}|dy + \sup_{x\in\boldsymbol{R}^3} \frac{1}{|B(x,1)|} \int_{B(x,1)} |f(y)|dy < \infty,$$

ここで、$\bar{f}_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy$ である。

また、有界領域 Ω 上の $\mathbf{bmo}_\beta$ は次のように、上で定義したクラスの Ω への制限で定義する。

(ii)

$$\mathbf{bmo}_\beta(\Omega) \equiv \{f \in L^1(\Omega);\ \text{there exists } \tilde{f} \in \mathbf{bmo}_\beta(\boldsymbol{R}^3) \text{ with } \tilde{f} = f \text{ in } \Omega\},$$

$$\|f\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\Omega)} \equiv \inf\{\|\tilde{f}\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\boldsymbol{R}^3)}; \tilde{f} \in \mathbf{bmo}_\beta(\boldsymbol{R}^3) \text{ with } \tilde{f} = f \text{ in } \Omega\}.$$

特に $\beta(r) = 1$ のとき、$\mathbf{bmo}_\beta(\boldsymbol{R}^3) = \mathbf{bmo}(\boldsymbol{R}^3)$、$\mathbf{bmo}_\beta(\Omega) = \mathbf{bmo}(\Omega)$ と書く。また、$\beta \geq 1$ より、明らかに $\mathbf{bmo} \subset \mathbf{bmo}_\beta$,

$$\|f\|_{\mathbf{bmo}_\beta} \leq \|f\|_{\mathbf{bmo}} \tag{2.1}$$

良く知られているように

$$\log 1/|x| \in \mathbf{bmo}(\Omega)$$

であるが、さらに

$$\log 1/|x| \cdot \log(e + \log(e + 1/|x|)) \in \mathbf{bmo}_\beta(\Omega) \text{ for } \beta(r) = \log(e + \log(e + 1/r))$$

もいえる。

2.2 Yudovich の空間

次に、Yudovich [36] が Euler 方程式の解の一意性を議論するために導入した関数空間を述べる。まず、Ω が有界領域のとき、

$$L^\infty(\Omega) \subset \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(\Omega)$$
$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cong \sup_{p\geq 1} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

であることを思い出そう。ここで $L^\infty(\Omega)$ は $\bigcap_{1\le p<\infty} L^p(\Omega)$ に含まれるが等くはない。例えば、$\log|x|$ は任意の $p\in[1,\infty)$ に対して $L^p(\Omega)$ に属するが、$L^\infty(\Omega)$ には属さない。そこで、任意の $L^p(\Omega)(p\ne\infty)$ に属するが、L^∞ には属さないような関数を扱うために次のような関数空間を考える。

<u>Definition 2.(Yudovich)</u> $\Theta(p)\ge 1$ を $[1,\infty)$ 上で定義された非減少関数とする。

$Y_\Theta(\Omega)\equiv\{f\in\bigcap_{1\le p<\infty}L^p(\Omega);\|f\|_{Y_\Theta(\Omega)}<\infty\}$。ここで、

$$\|f\|_{Y_\Theta(\Omega)}\equiv\sup_{p\ge 1}\frac{\|f\|_{L^p(\Omega)}}{\Theta(p)}.$$

である。

明らかに、$L^\infty(\Omega)\subset Y_\Theta(\Omega)$, $\|f\|_{Y_\Theta(\Omega)}\le\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$. すなわち、$Y_\Theta(\Omega)$ は $L^\infty(\Omega)$ の拡張になっている。

また、$\|\log|x|\|_{L^p(\Omega)}\le C\cdot p$ であることから、$\Theta(p)=p$ と置くと $\log|x|\in Y_\Theta(\Omega)$ となる。

2.3 Morrey type の空間

最後に Yudovich の関数空間と同様に次のような関数空間を定義する。Yudovich は Lebesgue 空間を利用したが、ここでは、Morrey 空間を利用する。

<u>Definition 3.</u> $M_\Theta(\Omega)\equiv\{f\in L^1_{loc}(\Omega);\|f\|_{M_\Theta(\Omega)}<\infty\}$, ここで、

$$\|f\|_{M_\Theta(\Omega)}\equiv\sup_{p\ge 1}\frac{\|f\|_{M^p_{loc}(\Omega)}}{\Theta(p)};$$
$$\|f\|_{M^p_{loc}(\Omega)}=\sup_{B(x,r),0<r<1}\left\{\int_{B(x,r)\cap\Omega}|f|dy\cdot r^{-n+n/p}\right\}$$

である。

明らかに $Y_\Theta\subset M_\Theta$ であり、また簡単な計算から

$$\log 1/|x|\in M_\Theta(\Omega)\text{ for }\Theta(p)=p$$
$$\log 1/|x|\cdot\log\log(1/|x|+e)\in M_\Theta(\Omega)\text{ for }\Theta(p)=p\cdot\log(p+e)$$
$$\log(e+\log(e+1/|x|))\in M_\Theta(\Omega)\text{ for }\Theta(p)=\log(e+p).$$

などがいえる。

$M_\Theta(\Omega)$ は $\mathbf{bmo}$ や $\mathbf{bmo}_\beta$ と次のような関係がある。

$$\|f\|_{M_\Theta(\Omega)}\le C\|f\|_{Y_\Theta(\Omega)}\le C'\|f\|_{\mathbf{bmo}(\Omega)}\text{ if }\Theta(p)\ge p \tag{2.2}$$

$\Theta(p)=p\cdot\log(e+p)$, $\beta(r)=\log(e+\log(e+1/r))$ とすると、

$$\|f\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\Omega)}+\|f\|_{M_\Theta(\Omega)}\le C\|f\|_{M_{\log(e+p)}(\Omega)} \tag{2.3}$$

3 主結果と考察

3.1 主結果

今後、

(3.4) $\beta(r)=\log(e+\log(e+1/r))$ かつ $\Theta(p)=p\cdot\log(e+p)$

と置くことにする。

Theorem 3 *m* を *3* 以上の整数とし、*u* を $C([0,T);H^m(\Omega))$ に属する *Euler* 方程式の解とする。もし

$$\limsup_{t\nearrow T}\|u(t)\|_{H^m}=\infty$$

であるならば、

$$\int_0^t \|\omega(\tau)\|_{\mathbf{bmo}_{\beta(\Omega)}}+\|\omega(\tau)\|_{M_\Theta(\Omega)}d\tau \nearrow \infty \ \ as\ t\nearrow T.$$

ここで $\omega=\mathrm{rot}\ u$ である。

(2.1) と (2.2) より、次の Corollary が従う。

Corollary 1 *Theorem 3* の仮定のもとで、

$$\int_0^t \|\omega(\tau)\|_{\mathbf{bmo}(\Omega)}d\tau \nearrow \infty \ \ as\ t\nearrow T$$

がいえる。

また、(2.3) を使うと次の Corollary がでる。

Corollary 2 *Theorem 3* の仮定のもとで、

$$\int_0^t \|\omega(\tau)\|_{M_{\log(e+p)}(\Omega)}d\tau \nearrow \infty \ \ as\ t\nearrow T$$

がいえる。

Remarks. (i) Ferrari [14] と Shirota-Yanagisawa [28] は、Theorem 3 と同じ仮定のもとで $\int_0^T\|\omega(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}d\tau=\infty$ を示している。$\|\omega\|_{\mathbf{bmo}(\Omega)}\le C\|\omega\|_{L^\infty(\Omega)}$ であることより、Theorem 3 は Ferrari と Shirota-Yanagisawa の結果の拡張になっている。

(ii) Theorem 3 では、β と Θ を (3.4) のように固定したが、もっと一般的な物に対しても Theorem 3 は成り立つ。 正確には、β は $\beta(r)=\Theta(\log(e+1/r))/\log(e+1/r)$ で定義される $(0,1]$ 上の関数で、$\Theta(p)$ は $[1,\infty)$ 上で定義される 1 以上の非減少関数で次の条件をみたす物である。

(3.5) $\Theta(p)\ge p \quad (p\ge 1),$

$$\int^{+\infty} \frac{dp}{\Theta(p)} = \infty, \tag{3.6}$$

$s \geq 1$ に対して、

$$\Theta(sp) \leq C(s)\Theta(p) \text{ for all } p \geq 1 \tag{3.7}$$

をみたすような定数 $C(s)$ が存在する。

(条件 (3.5) より $\beta(r) \geq 1$ である。)

具体的には

$$\begin{aligned}
&\Theta(p) = p, \quad \beta(r) = 1;\\
&\Theta(p) = p \cdot \log(e+p), \quad \beta(r) = \log(e + \log(e + 1/r));\\
&\Theta(p) = p \cdot \log(e+p) \cdot \log(e + \log(e+p)),\\
&\beta(r) = \log(e + \log(e + 1/r)) \cdot \log(e + \log(e + \log(e + 1/r)))
\end{aligned}$$

などである。

Theorem 3 の証明には次の lemma が重要である。

Lemma 3.1 ある定数 $C(\Theta, \Omega)$ が存在し、次の不等式が成り立つ。

任意の $u \in H^3_\sigma(\Omega)$ に対し、

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\left\{\left(1 + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{rot}\ u\|_{\mathbf{bmo}_{\beta}(\Omega)} + \|\mathrm{rot}\ u\|_{M_\Theta(\Omega)}\right)\Theta(\log(e + \|u\|_{H^3(\Omega)})\right\}$$

が成り立つ。ここで、$H^m_\sigma(\Omega)$ は

$$H^m_\sigma(\Omega) \equiv \{v \in H^m(\Omega); \mathrm{div}\ v = 0 \ \ in\ \Omega, \quad v \cdot n = 0 \ \ on\ \partial\Omega\}$$

Remark $\Theta(p) = p$, $\beta(r) = 1$ と置くと, $\|f\|_{M_\Theta(\Omega)} \leq C\|f\|_{\mathbf{bmo}(\Omega)}$ より

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(1 + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{rot}\ u\|_{\mathbf{bmo}(\Omega)}) \log(e + \|u\|_{H^3(\Omega)})$$

がいえる。

また、上の Lemma の証明には次の proposition が重要である。

Proposition 3.1 $s > 3/p$ とおく。

ある定数 $C(s, p, \Theta, \Omega)$ が存在し、任意の $f \in W^{s,p}(\Omega)$ に対し

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\{1 + \|f\|_{M_\Theta(\Omega)}\Theta(\log(e + \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}))\} \tag{3.8}$$

が成り立つ。

この Proposition の証明には Brezis-Gallouet-Wainger[4],[5] の不等式の別証明を与えた Engler[13] と Ozawa[27] の方法を使う。

3.2 主結果の考察

ここでは、Beale-Kato-Majda の結果 (Theorem 2) を Theorem 3 のように改良したことによって何が言えるのかをみる。

$W(x) = \sup_{0<t<T} |\omega(x,t)|$ とおく。明らかに Beale-Kato-Majda の結果から $W \notin L^\infty$ がいえる。しかし、もし仮に $W(x)$ が有限個の特異点を持ったとしても、L^∞-norm を使っていたのでは、どのような特異点なのかはわからない。一方、Corollary 2 を使うと, $\Theta(p) = \log(e+p)$ に対して $\|W\|_{M_\Theta} = \infty$ がいえ、したがって、W は少なくとも一つは、$\log^+ \log^+ 1/|x|$ よりも強い特異点を持つことがわかる。粗っぽく言うと、$\omega(x,T)$ は $\log^+ \log^+ 1/|x|$ よりも強い特異点を持つ。

また、$\|\omega\|_{\mathbf{bmo}} \le C\|\omega\|_{W^{1,3}}$ と Corollary 1 から、

$$\int_0^t \|\omega(\tau)\|_{W^{1,3}} d\tau \nearrow \infty \quad (t \nearrow T)$$

がいえる。

4 Theorem 3 の証明

Beale-Kato-Majda [2] の方法に従って証明する。通常の H^m-energy 評価より

$$(4.1) \quad \|u(t)\|^2_{H^m(\Omega)} \le \|a\|^2_{H^m(\Omega)} + C\textstyle\int_0^t \|u(\tau)\|^2_{H^m(\Omega)} \|u(\tau)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} d\tau$$

Gronwall 不等式をつかうと

$$\|u(t)\|_{H^m(\Omega)} \le \|a\|_{H^m(\Omega)} \exp\left(C\int_0^t \|u(\tau)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} d\tau\right)$$

両辺の log をとると、

$$(4.2) \quad \log(e + \|u(t)\|_{H^m}) \le \log(e + \|a\|_{H^m}) + C\int_0^t \|u(\tau)\|_{W^{1,\infty}} d\tau.$$

ここで、Lemma 3.1 の不等式：

$$(4.3) \quad \|u\|_{W^{1,\infty}} \le C\{1 + \|u\|_{L^2} + (\|\omega\|_{\mathbf{bmo}_\beta} + \|\omega(\tau)\|_{M_\Theta})\Theta(\log(e + \|u\|_{H^m}))\}$$

をつかう。$\Theta(p) = p \cdot \log(e+p)$ ととり、(4.2) に (4.3) を代入し、$\log(e + \|u\|_{H^m})$ に対して Gronwall 不等式を使うと、

$$\|u(t)\|_{H^m} \le C(\|a\|_{H^m} + e) \exp\exp\exp \int_0^t (\|\omega(\tau)\|_{\mathbf{bmo}_\beta} + \|\omega(\tau)\|_{M_\Theta}) d\tau$$

を得る。これより **Theorem 3** が従う。

$\Theta(p) = p \cdot \log(e+p) \cdot \log(e + \log(e+p))$ ととれば、exp exp exp exp の評価を得る。

5 Lemma 3.1 の証明

ここでは、$\Omega = \boldsymbol{R}^3_+ = \{(x_1, x_2, x_3); x_3 > 0\}$(半空間) の場合だけ証明する。$u$ は次の方程式をみたす一意な解である。

$$(5.1) \quad \begin{cases} \nabla \times u = \omega & \text{in } \boldsymbol{R}^3_+ \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \boldsymbol{R}^3_+, \\ u \cdot n = 0 & \text{on } \partial \boldsymbol{R}^3_+, \end{cases}$$

この方程式の解は次の表現を持つ

$$(5.2) \quad u(x) = \int_{\boldsymbol{R}^3_+} G(x, y)\omega(y)dy$$

ここで、G は行列の Green 関数で、次を満たす。

$$(5.3) \quad |\partial_x^\alpha \partial_y^\gamma G(x, y)| \le C_{\alpha,\gamma} \left(\frac{1}{|x-y|}\right)^{2+|\alpha|+|\gamma|}$$

(注) Ω がもっと一般的な領域でもそれに対応した Green 関数が存在する。Solonnikov '70, '71 Ferrari '93。

ここで、(5.1) の両辺を x_1 で微分すると

$$(5.4) \quad \begin{cases} \nabla \times \frac{\partial}{\partial x_1} u = \frac{\partial}{\partial x_1}\omega & \text{in } \boldsymbol{R}^3_+ \\ \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} u = 0 & \text{in } \boldsymbol{R}^3_+, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} u \cdot n = 0 & \text{on } \partial \boldsymbol{R}^3_+, \end{cases}$$

$\frac{\partial}{\partial x_1} u$ は上の方程式の一意の解なので

$$(5.5) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) = \int_{\boldsymbol{R}^3_+} G(x, y) \frac{\partial}{\partial y_1}\omega(y)dy$$

で表せる。

Littlewood-Paley 分解: 次のような η, ϕ が存在する。
$\eta \in C_0^\infty(B(1, 0))$, $\phi \in C_0^\infty(B(2, 0) \setminus B(1/2, 0))$, $\phi_j(\xi) = \phi(2^{-j}\xi)$

$$\eta(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi) = 1, \quad \xi \in \boldsymbol{R}^3$$

よって

$$1 = \eta(2^N(x-y)) + \sum_{j=-N}^{N} \phi(2^{-j}(x-y)) + \sum_{j=N}^{\infty} \phi(2^{-j}(x-y))$$

である。これを使い (5.5) を分解する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}u(x) &= \int_{\boldsymbol{R}^3_+}\eta(2^N(x-y))G(x,y)\frac{\partial}{\partial y_1}\omega(y)dy\\ &\quad+\int_{\boldsymbol{R}^3_+}\sum_{j=-N}^{N}\phi(2^{-j}(x-y))G(x,y)\frac{\partial}{\partial y_1}\omega(y)dy\\ &\quad+\int_{\boldsymbol{R}^3_+}\sum_{j=N}^{\infty}\phi(2^{-j}(x-y))G(x,y)\frac{\partial}{\partial y_1}\omega(y)dy\\ &\equiv v_h(x)+v_l(x)+v_m(x)\end{aligned}$$

v_1 と v_3 は Hëlder 不等式や Sobolev 不等式を使うと簡単に評価でき

$$|v_h(x)|+|v_m(x)|\le C2^{-N/2}\|\omega\|_{H^2}\le C2^{-N/2}\|u\|_{H^3}$$

となる。

$\tilde{\omega}$ を ω の $\boldsymbol{R}^3$ への任意の拡張とし、$C_j(x)$ を y によらない任意の 3 次元ベクトルとする。

$$\begin{aligned}v_l(x) &= \sum_{j=-N}^{N}\int_{\boldsymbol{R}^3_+}\phi(2^{-j}(x-y))G(x,y)\frac{\partial}{\partial y_1}(\tilde{\omega}(y)-C_j(x))dy\\ &= -\sum_{j=-N}^{N}\int_{\boldsymbol{R}^3_+}\frac{\partial}{\partial y_1}\left\{\phi(2^{-j}(x-y))G(x,y)\right\}(\tilde{\omega}(y)-C_j(x))dy\end{aligned}$$

ここで、

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_1}\left\{\phi(2^{-j}(x-y))G(x,y)\right\}\right|\le C2^{-j}=C/|B(x,2^{-j+1})|$$

よって

$$\begin{aligned}|v_l(x)| &= C\sum_{j=-N}^{N}\int_{\boldsymbol{R}^3_+\cap B(x,2^{-j+1})}|B(x,2^{-j+1})|^{-1}|\tilde{\omega}(y)-C_j(x)|dy\\ &\le C\sum_{j=-N}^{N}\int_{B(x,2^{-j+1})}|B(x,2^{-j+1})|^{-1}|\tilde{\omega}(y)-C_j(x)|dy\\ &\le C\sum_{j=-N}^{N}\beta(2^{-j+1})\|\tilde{\omega}\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\boldsymbol{R}^3)}\end{aligned}$$

ただし $C_j(x)=\frac{1}{|B(x,2^{-j+1})|}\int_{B(x,2^{-j+1})}\tilde{\omega}(y)dy$。

よって、

$$\begin{aligned}|v_l(x)| &\le CN\beta(2^{-N+1})\|\tilde{\omega}\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\boldsymbol{R}^3)}\\ &\le C\Theta(N)\|\tilde{\omega}\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\boldsymbol{R}^3)} \quad \beta(r)=\frac{\Theta(\log(e+1/r))}{\log(e+1/r)}\\ &\le C\Theta(N)\|\omega\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\Omega)}\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial}{\partial x_1}u\|_\infty &\le \|v_h\|_\infty+\|v_l\|_\infty+\|v_m\|_\infty\\ &\le C\left(2^{-N/2}\|u\|_{H^3}+\Theta(N)\|\omega\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

ここで、$2^{-N/2}\|u\|_{H^3}\le 1$ となるように $N=2[\log_2\|u\|_{H^3}]+1$ ととると、

$$\|\frac{\partial}{\partial x_1}u\|_\infty \le C\{1+\|\omega\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\Omega)}\Theta(\log(e+\|u\|_{H^3}))\}$$

同様に

$$\|\frac{\partial}{\partial x_2}u\|_\infty \le C\{1+\|\omega\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\Omega)}\Theta(\log(e+\|u\|_{H^3}))\}$$

$\frac{\partial}{\partial x_3}u$ に関しては、次の関係を使う。

$$\frac{\partial}{\partial x_3}u=(\omega^2+\frac{\partial u^3}{\partial x_1},\ -\omega^1+\frac{\partial u^3}{\partial x_2},\ -\frac{\partial u^1}{\partial x_1}-\frac{\partial u^2}{\partial x_2})$$
$$\|\frac{\partial}{\partial x_3}u\|_\infty\le\|\omega\|_\infty+\|\frac{\partial}{\partial x_1}u\|_\infty+\|\frac{\partial}{\partial x_2}u\|_\infty$$

ここで、**Proposition 3.1** より

$$\|\omega\|_\infty\le C\{1+\|\omega\|_{M_\Theta}\Theta(\log(e+\|u\|_{H^3}))\}$$

よって、

$$\|\nabla u\|_\infty\le C\left(1+\|\omega\|_{\mathbf{bmo}_\beta(\Omega)}+\|\omega\|_{M_\Theta}\right)\Theta(\log(e+\|u\|_{H^3}))$$

References

[1] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L., *Estimates over the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditioins II*, Comm. Pure Appl. Math. , **17** (1964), 35-92.

[2] Beale, J.T., Kato, T., Majda, A., *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*, Commun. Math. Phys. , **94** (1984), 61-66.

[3] Bourguignon, J.P., Brezis, H., *Remarks on the Euler equations*, J. Funct. Anal, **15** (1974), 341-363.

[4] Brezis, H., Gallouet, T., *Nonlinear Schrödinger evolution equations* , Nonlinear Anal. T.M.A. , **4** (1980), 677-681.

[5] Brezis, H., Wainger, S., *A note on limiting cases of Sobolev embedding and convolution inequalities.*, Comm. Partial Differential Equations , **5** (1987), 773-789.

[6] Chae, D., Kim, S.-K., Nam, H.-S., *Local existence and blow up criterion of Hëlder continuous solutions of the Boussinesq equations.*, Nagoya Math. J. , **155** (1999), 55-80.

[7] Chae, D., Nam, H.-S., *Local existence and blow up criterion for the Boussinesq equations.*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **127A** (1997), 935-946.

[8] Constantin, P., *Geometric statistics in turbulence*, Siam Review, **36** (1994), 73-98.

[9] Constantin, P., *Geometric and analytic studies in turbulences*, in Trends and Perspectives in Appl. Math., L.Sirovich ed., Appl. Math. Sciences **100** (1994), Springer-Verlag.

[10] Constantin, P., *Active Scalars and the Euler Equation*, Tatra Mountain Math. Publ., **4** (1994), 25-38.

[11] Constantin, P., Fefferman, C., Majda, A., *Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-D Euler equations.*, Comm. Partial Differential Equations , **21** (1996), 559-571.

[12] Ebin, D. G., Marsden, J., *Groups of diffeomorphisms and the motion og an imcompressible fluid.* Ann. of Math. , **92** (1970), 102-163.

[13] Engler, H., *An alternative proof of the Brezis-Wainger inequality*, Comm. Partial Differential equations. , **14** no. 4 (1989), 541-544.

[14] Ferrari, A. B., *On the blow-up of solutions of 3-D Euler equations in a bounded domain*, Commun. Math. Phys. , **155** (1993), 277-294.

[15] Ishimura, N., Morimoto, H., *Remarks on the blow-up criterion for the 3-D Boussinesq equations*, Math. Models Methods Appl. Sci. ,**9** (1999) 1323-1332.

[16] Kato, T., Lai, C. Y., *Nonlinear evolution equations and the Euler flow*, J. Funct. Anal. , **56** (1984), 15-28.

[17] Kato, T., Ponce, G., *Well-posedness of the Euler and Navier-Stokes equations in the Lebesgue spaces* $L^p_s(\boldsymbol{R}^2)$, Revista Math. Iberoamericana , **2**, (1986), 73–88.

[18] Kato, T., Ponce, G., *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. , **41**, (1988), 891-907.

[19] Kozono, H., Taniuchi, Y., *Bilinear estimates in BMO and to the Navier-Stokes equations*, Math. Z, **235** (2000) 173-194

[20] Kozono, H., Taniuchi, Y., *Limiting case of the Sobolev inequality in BMO, with application to the Euler equations*, Commun. Math. Phys. **214** (2000) 191-200

[21] Kozono, H., Ogawa, T., Taniuchi, Y., *The critical Sobolev inequalities in Besov spaces and regularity criterion to some semi-linear evolution equations*, preprint.

[22] Ogawa, T., Taniuchi, Y., *Remarks on uniqueness and blow-up criterion to the Euler equations in the generalized Besov spaces*, J. Korean Math. Soc.**37** (2000)

[23] Ogawa, T., Taniuchi, Y., *A note on blow-up criterion to the 3-D Euler equations in a bounded domain*, preprint.

[24] Ogawa, T., Taniuchi, Y., *On blow-up criteria of smooth solutions to the 3-D Euler equations in a bounded domain*, preprint.

[25] Okazawa, N., *Abstract quasilinear evolution equations of hyperbolic type, with applications*, Nonlinear Analysis and Applications (Warsaw,1994), GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **7** 1995 303-307.

[26] Okazawa, N., *The Euler Equation on a bounded domain as a quasilinear evolution equation*, Commun. Appl. Nonlinear Anal., **3** 1996 107-113.

[27] Ozawa, T., *On critical cases of Sobolev's inequalities*, J. Funct. Anal., **127** (1995), 259-269.

[28] Shirota, T., Yanagisawa, T., *A continuation principle for the 3-D Euler equations for incompressible fluids in a bounded domain*, Proc. Japan Acad., **69** Ser. A (1993) 77-82.

[29] Solonnikov, V.A., *On Green's Matrices for Elliptic Boundary Value Problems I*, Trudy Mat. Inst. Steklov **110** (1970), 123-170.

[30] Solonnikov, V.A., *On Green's Matrices for Elliptic Boundary Value Problems II*, Trudy Mat. Inst. Steklov **116** (1971), 187-226.

[31] Taniuchi, Y., *A note on the blow-up criterion for the inviscid 2-D Boussinesq equations*, preprint

[32] Taylor, M.E., *Pseudodifferential operators and nonlinear PDE* , Progress of Mathematics, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1991

[33] Temam, R., *On the Euler equations of incompressible perfect fluids* , J. Fanct. Anal., **20** (1975), 32-43.

[34] Vishik, M., *Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline sapces of Besov type*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **32** (1999) 769-812.

[35] Vishik, M., *Incompressible flows of an ideal fluid with unbounded vorticity*, Commun. Math. Phys. **213** (2000) 697-731.

[36] Yudovich, V. I., *Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid*, Math. Research Letters. , **2** (1995), 27-38.